Funkcja maksymalna i przyjaciele (praca domowa)

Zasady. Poniższe zadania należy oddać na piśmie do 31 maja 2019. W formie papierowej prace mozna złożyć najpóźniej na ćwiczeniach, w formie elektronicznej do północy. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie, oczywiście bez ograniczeń przy korzystaniu z literatury. Treści pojawiające się we wskazówkach również wymagają uzasadnienia. Uprzedzam, że mogły się tutaj znaleźć (niezamierzone) błędy – proszę je zgłaszać, to może wszystkim uprościć życie.

Definicja. Dla $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definiujemy funkcję maksymalną $\mathcal{M}u\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ wzorem

$$\mathcal{M}u(x) = \sup_{r>0} \fint_{\mathbf{B}_r(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Należy odnotować, że $\mathcal{M}$ nie jest operatorem liniowym, ale spełnia $\mathcal{M}(f+g) \leqslant \mathcal{M}f + \mathcal{M}g$.

Twierdzenie Hardy'ego Littlewooda. Zachodzą następujące oszacowania:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}u\|_{L^p} &\leqslant A_{n,p}\|u\|_{L^p} \quad \text{dla } u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 < p \leqslant \infty, \\ |\{\mathcal{M}u \geqslant \lambda\}| &\leqslant \frac{A_{n,1}}{\lambda}\|u\|_{L^1} \quad \text{dla } u \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \lambda > 0. \end{aligned}$$

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, to

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C_n \Lambda |x-y|$$

dla p.w. x, y ze zbioru $\{\mathcal{M}|\nabla u| \leqslant \Lambda\}$.

Wskazówka. Wykorzystać nierówność Poincarégo do oszacowania różnicy średnich $|u_{x,2^{-k}r} - u_{x,2^{-k-1}r}|$ na kulach $\mathbf{B}_{2^{-k}r}(x)$.

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnej funkcji $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja lipszycowska $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że $u \equiv v$ poza zbiorem o mierze Lebesgue'a nieprzekraczającej ε.

Wskazówka. Jeśli $v\colon A \to \mathbb{R}$ jest L-lipszycowska, to $\overline{v}(x) = \inf\{v(a) + L|x-a| : a \in A\}$ jest jej L-lipszycowskim przedłużeniem na $\mathbb{R}^n$.

Następne zadania pokazują, że funkcja maksymalna $\mathcal{M}u$ dziedziczy po funkcji u nie tylko całkowalność, ale i regularność.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli funkcja $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ i stałą $C > 0$

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}^n,$$

to funkcja maksymalna $\mathcal{M}u$ również.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, to dla dowolnego $r > 0$ funkcja

$$v_r(x) = ⨍_{\mathbf{B}_r(x)} |u(y)| \, \mathrm{d}y$$

również należy do $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ oraz $|\partial_i v_r| \leqslant \mathcal{M}\partial_i u$ punktowo.

Zadanie 5. Sprawdzić, że jeśli dany jest ciąg słabo zbieżny $w_k \rightharpoonup w$ w $L^p(\mathbb{R}^n)$ oraz $w_k \geqslant 0$, to w też jest funkcją nieujemną.

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ i $1 < p < \infty$, to również $\mathcal{M}u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, ponadto zachodzi nierówność

$$|\partial_i \mathcal{M}u(x)| \leqslant \mathcal{M}\partial_i u(x) \quad \text{dla p.w. } x \in \mathbb{R}^n.$$